

SZÁMTANI KÖZÉP, MÉRTANI KÖZÉP; SZÁMTANI ÉS MÉRTANI KÖZÉP KÖZTI EGYENLŐTLENSÉG; VÁLTOZÁSOK 1.

ELMÉLET

Átlag vagy más szóval számtani közép

Adott n darab valós szám: $a_1, a_2, \dots, a_n$. Ezen számok **átlagát** vagy más szóval **számtani közepét** megkapjuk, ha az összeget osztjuk n -nel, vagyis a számok darabszámával: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

Ha az adatok gyakorisága ismert, akkor egyszerűbbé tehetjük a számolást: a számok összegét úgy számoljuk ki, hogy az adatokat megszorozzuk a gyakoriságukkal, majd ezeket a szorzatokat összeadjuk. Ekkor azt mondjuk, hogy **súlyozott számtani közepet** számoltunk.

ELMÉLET

1. Két valós szám számtani közepe

Definíció: Ha a és b valós szám, akkor az $\frac{a+b}{2}$ számot a és b **számtani közepének** nevezzük.

2. Két pozitív valós szám mértani közepe

Pozitív számok esetén definiáljuk a számok mértani közepét is.

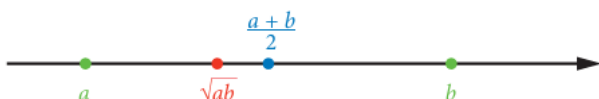
Definíció: Ha az a és b pozitív valós szám, akkor a $\sqrt{a \cdot b}$ számot a és b **mértani közepének** nevezzük.

3. Számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség

Tétel: Ha a és b pozitív valós számok, akkor számtani közepük nagyobb vagy egyenlő, mint mértani közepük. Számtani és mértani közepük akkor és csak akkor egyenlő, ha $a = b$.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b} \quad (a, b \text{ pozitív valós számok})$$

- Ha $a = b$, akkor a és b számtani és mértani közepe egyenlő $\left(\frac{a+a}{2} = a \text{ és } \sqrt{a \cdot a} = a\right)$. Az állítás megfordítása is igaz: ha két pozitív szám számtani és mértani közepe egyenlő, akkor maguk a számok is egyenlők.
- Ha $a \neq b$, akkor a és b számtani közepe nagyobb, mint a mértani közepük: $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$. Az állítás megfordítása is igaz: ha két pozitív szám számtani közepe nagyobb a mértani közepükénél, akkor a két szám nem egyenlő.



Például:

a 8 és a 98 számtani közepe: $(8 + 98) : 2 = 106 : 2 = 53$, a mértani közepük: $\sqrt{8 \cdot 98} = \sqrt{784} = 28$.

Látjuk, hogy a számtani közép nagyobb a mértani közepénél: $53 > 28$.

- 1.** Januárban Antal és Benő is 150 ezer forint nettó bért kapott, márciusban pedig mindketten 216 ezer forintot. Antal bére februárban és márciusban is ugyanannyival növekedett, Benő bére pedig mindkét hónapban ugyanannyiszorosára nőtt. Melyikük kapott több bért februárban?

Megoldás

Antal februári bére *annyival* több a januári bérénel, *amennyivel* a márciusi bére több a februárinál. Ha tehát a februári bére x Ft, akkor $x - 150 = 216 - x$. Ebből $2x = 150 + 216$, vagyis Antal februári bére $x = \frac{150 + 216}{2} = 183$ ezer forint.

Ez éppen a januári és a márciusi bérének a **számtani közepe**.

Benő februári bére *annyiszorosa* a januári bérének, *ahány-szorosa* a márciusi bére a februárinak. Ha a februári bére

y Ft, akkor $\frac{y}{150} = \frac{216}{y}$. Ebből $y^2 = 150 \cdot 216$, vagyis $y = \sqrt{150 \cdot 216} = 180$ ezer forint.

Antal több bért kapott februárban, mint Benő.

Megjegyzés

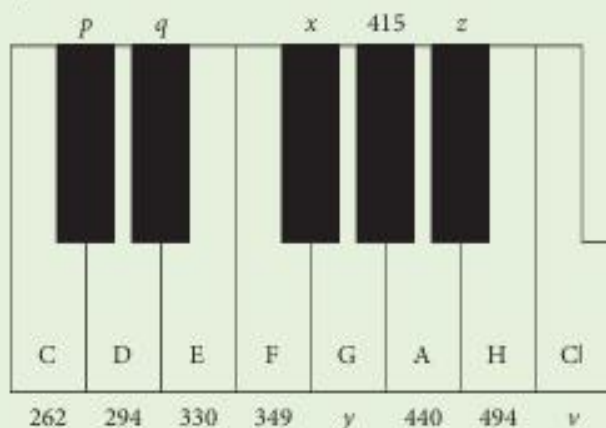
A $\sqrt{150 \cdot 216} = 180$ számot a 150 és a 216 **mértani (geometriai) közepének** nevezzük. A 150 és a 216 számtani közepe nagyobb, mint a mértani közepük.

- 2.** Egy téglalap két szomszédos oldalának hossza a cm és b cm. Hány cm annak a négyzetnek az oldala, amelynek a téglalapével megegyező
- a)** a kerülete, **b)** a területe?

Megoldás

- a) Legyen a keresett négyzet oldala x cm. A téglalap kerülete $(2a + 2b)$ cm, a négyzet kerülete $4x$ cm. A kerületek egyenlők: $4x = 2a + 2b$. A négyzet oldala tehát $x = \frac{a+b}{2}$ cm hosszú, azaz a téglalap két szomszédos oldala hosszának **számtani közepe**.
- b) Legyen a keresett négyzet oldala y cm. A téglalap területe $(a \cdot b)$ cm², a négyzet területe y^2 cm². A területek egyenlők: $y^2 = a \cdot b$. Melyik pozitív számnak a négyzete az $a \cdot b$? A $\sqrt{a \cdot b}$ -nek. Tehát $y = \sqrt{a \cdot b}$. Eszerint a négyzet oldala $\sqrt{a \cdot b}$ cm hosszúságú.

- 1.** A zongora fehér billentyűinek szokásos elnevezése és a hozzájuk tartozó hangfrekvenciák az ábrán láthatók. Egy fekete billentyű leütésekor megszólaló hang frekvenciája a szomszédos két fehér billentyűhöz tartozó frekvenciák



frekvenciájának mértani közepe. Ha egy fehér és egy fekete billentyű fog közre egy fehér billentyűt (pl. E, F vagy H), akkor az ehhez tartozó frekvencia a két közrefogó billentyű frekvenciájának mértani közepe. (A frekvenciát hertzben mérjük. Például a fenti ábrán megadott A hang frekvenciája 440 Hz.)



- Számítsd ki az ismeretlen frekvenciákat!
- Hányszorosa a C hang frekvenciájának az egy oktávval magasabban megszólaló C' hang frekvenciája?
- A C hangtól elindulva sorra leütjük mindegyik billentyűt. Mit mondhatunk az egymás után megszólaló hangok frekvenciájának arányáról (az arányokat századra kerekítve)?

1. feladat – Zongorabillentyűk és frekvenciák

Az ábrán a fehér billentyűk frekvenciái láthatók:

C = 262 Hz, D = 294 Hz, E = 330 Hz, F = 349 Hz, G = y, A = 440 Hz, H = 494 Hz, C₁ = v,
továbbá az egyik felső C mellett 415 Hz szerepel.

Tudjuk, hogy egy fekete billentyű frekvenciája a két szomszédos fehér billentyű
frekvenciájának **mértani közepe**.

a) Az ismeretlen frekvenciák

1. y meghatározása (G hang)

A G és A között lévő fekete billentyű frekvenciája 415 Hz, tehát:

$$\sqrt{y \cdot 440} = 415$$

Négyzetre emelve:

$$y \cdot 440 = 415^2$$

$$y = \frac{415^2}{440} \approx 391 \text{ Hz}$$

→ y ≈ 392 Hz

2. v meghatározása (felső C)

A H (494 Hz) és C₁ között lévő fekete billentyű frekvenciája mértani közép.

Mivel az oktávban a frekvencia duplázódik:

$$v = 2 \cdot 262 = 524 \text{ Hz}$$

→ v ≈ 523–524 Hz

b) Hányszorosa a felső C az alsó C-nek?

$$\frac{524}{262} = 2$$

Válasz: pontosan kétszeres.

Ez az oktáv tulajdonsága: az egy oktávval magasabb hang frekvenciája kétszeres.

c) Egymás utáni hangok aránya

Számoljuk ki például:

- $D / C = 294 / 262 \approx 1,12$
- $E / D = 330 / 294 \approx 1,12$
- $F / E \approx 349 / 330 \approx 1,06$
- $G / F \approx 392 / 349 \approx 1,12$
- $A / G \approx 440 / 392 \approx 1,12$
- $H / A \approx 494 / 440 \approx 1,12$
- $C_1 / H \approx 524 / 494 \approx 1,06$

Mit figyelhetünk meg?

- A legtöbb arány kb. 1,12
- Két helyen kisebb: kb. 1,06

Ez azért van, mert a zenei hangsor nem egyenletes lépésközü:

- vannak **egész hangközök** ($\sim 1,12$ -szeres szorzó),
 - és **félhangközök** ($\sim 1,06$ -szoros szorzó).
-